



TITLE:

楽器用木材の音響と物性の秘密の 関係 (非線形波動現象のメカニズム と数理)

AUTHOR(S):

小野, 晃明

CITATION:

小野, 晃明. 楽器用木材の音響と物性の秘密の関係 (非線形波動現象のメカニズムと数理). 数理解析研究所講究録 2001, 1209: 89-98

ISSUE DATE:

2001-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41082>

RIGHT:

楽器用木材の音響と物性の秘密の関係

岐阜大工 小野晃明 (Teruaki ONO)

1. はじめに

バイオリン属やギターのような弦楽器では、音の放射源は主に表板であり、ピアノでは響板である。それらに用いられる材料は、ドイツトウヒ、アカエゾマツ、シトカスプールの針葉樹トウヒ属木材に限られており、その上、真っ直ぐな木目で節や割れなどの欠陥のない木材板が良質材として用いられている。バイオリン属の裏板に用いられる材料は、カエデに限定されており、美観を有する板が用いられている。ピアノ響板は木材棒のリブが上述の柾目面、すなわち、 LR 面の木材板に木目を横切って張り付けられている。バイオリン属の表板、つまり、響板は、上述の LR 面の木材板にバイオリン形状、 f 孔、響棒、厚さ分布、アーチを施され、その音色が生まれるのである。この事実から、弦楽器では、響板用素材板の周波数特性が表板の音色の基礎である。一方、それは音響的性質を決める材質によって直接的に影響を受ける。したがって、響板に使用される木材板とその他の木材板間の周波数特性の違いを明らかにすること、そして、どのようにそれが音響的性質の違いによって生じるのかというメカニズムを明らかにすることが必要である。周波数応答特性には定常特性と過度特性があり、また、楽器には音の立ち上がりも重要な要素である。しかし、従来の研究は定常特性に限られている。

これまでになぜ上述の種類の木材が楽器用材料として用いられているのかという理由を明らかにするため、木目方向、すなわち、 L 方向のそれらの振動的性質がもっぱら調べられてきた。そして、それに対する見解は殆ど確立されている。すなわち、響板用木材は L 方向において高い比ヤング率と低い内部摩擦を有し、裏板用木材は L 方向において振動的性質は劣るが美観を有する。しかしながら、木目を横切る方向、すなわち、 R 方向の振動的性質もまた、 LR 面の板のゆえ周波数特性に寄与するはずである。それ故、その役割や異方性の影響を見出すことが必要である。しかし、これまでにそれらに関する研究は殆どない。

本研究では、針葉樹の楽器響板に用いられるシトカスプール(Sp)、広葉樹のバイオリンの裏板に用いられるカエデ(Map)、プラスチックのアクリル樹脂(Acr)、金属のアルミニウム(Al)の小板(105×105×2mm)をタッピングし、リアルタイムオクターブバンドアナライザーを用いて過度特性を、また、撓み振動・振り振動を用いてそれらの材の振動的物性値を調べ、過度特性の物性的メカニズムを実験と理論の両面から調べた^{1),2)}。

2. 直交異方性矩形板の撓み振動

一般に、直交異方性柱目矩形板の撓み振動方程式は次の様に表される³⁾：

$$D_L \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{LR} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_R \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 D_L は L 方向の曲げ剛性、 D_R は R 方向の曲げ剛性、 D_{LR} は LR 面の剛性、 D_K は LR 面の捩り剛性を表し、それぞれ $D_L = \frac{E_L h^3}{12(1-\mu_{LR}\mu_{RL})}$ 、 $D_R = \frac{E_R h^3}{12(1-\mu_{LR}\mu_{RL})}$ 、 $D_{LR} = D_L \cdot \mu_{RL} + 2D_K = D_R \cdot \mu_{LR} + 2D_K$ 、 $D_K = \frac{G_{LR} h^3}{12}$ である。また、 w は変位、 x は L 方向の位置、 y は R 方向の位置、 h は厚さ、 ρ は密度、 E はヤング率、 G は剪断弾性率、 μ はポアソン比である。 $E' = \frac{E}{1-\mu_{LR}\mu_{RL}}$ とおくと、 $D_{LR} = (E'_L \cdot \mu_{RL} + 2G_{LR}) \frac{h^3}{12} = (E'_R \cdot \mu_{LR} + 2G_{LR}) \frac{h^3}{12}$ となるから、(1)式は次の様に変形できる：

$$\frac{h^3}{12} \left[E'_L \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(E'_L \cdot \mu_{RL} + 2G_{LR}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + E'_R \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1')$$

周辺支持で(1)式を解くと、次式の角振動数 ω が導かれる：

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho h} \left(\frac{\alpha^4 D_L}{l_L^4} + \frac{\beta^4 D_R}{l_R^4} + \frac{2\alpha^2 \beta^2 D_{LR}}{l_L^2 l_R^2} \right) \quad (2)$$

ここで、 $l_L=L$ 方向の辺長； $l_R=R$ 方向の辺長； α 、 β =境界条件と振動モードに依存する定数である。

さらに、正方形板のときは次の様になる：

$$\omega = \frac{\alpha^2}{l^2} \sqrt{\frac{D_L + D_R + 2D_{LR}}{\rho h}} \quad (3)$$

3. サウンドパワースペクトルの時間変化

リアルタイムオクターブバンドアナライザーはタッピング信号を、1ms 毎に25・20kHzの範囲の周波数で30バンドの1/3オクターブバンドパワースペクトルに解析、記録できる⁴⁾。各種材料の打音信号の1/3オクターブバンドパワースペクトルの時間変化を図2に示す。図は5ms 間隔でプロットした。図中、山脈は共振点である。低域から最初のブロードな山脈は木目直交方向1stモード共振点、二番目の鋭く大きい山脈は木目方向1stモード共振点である。

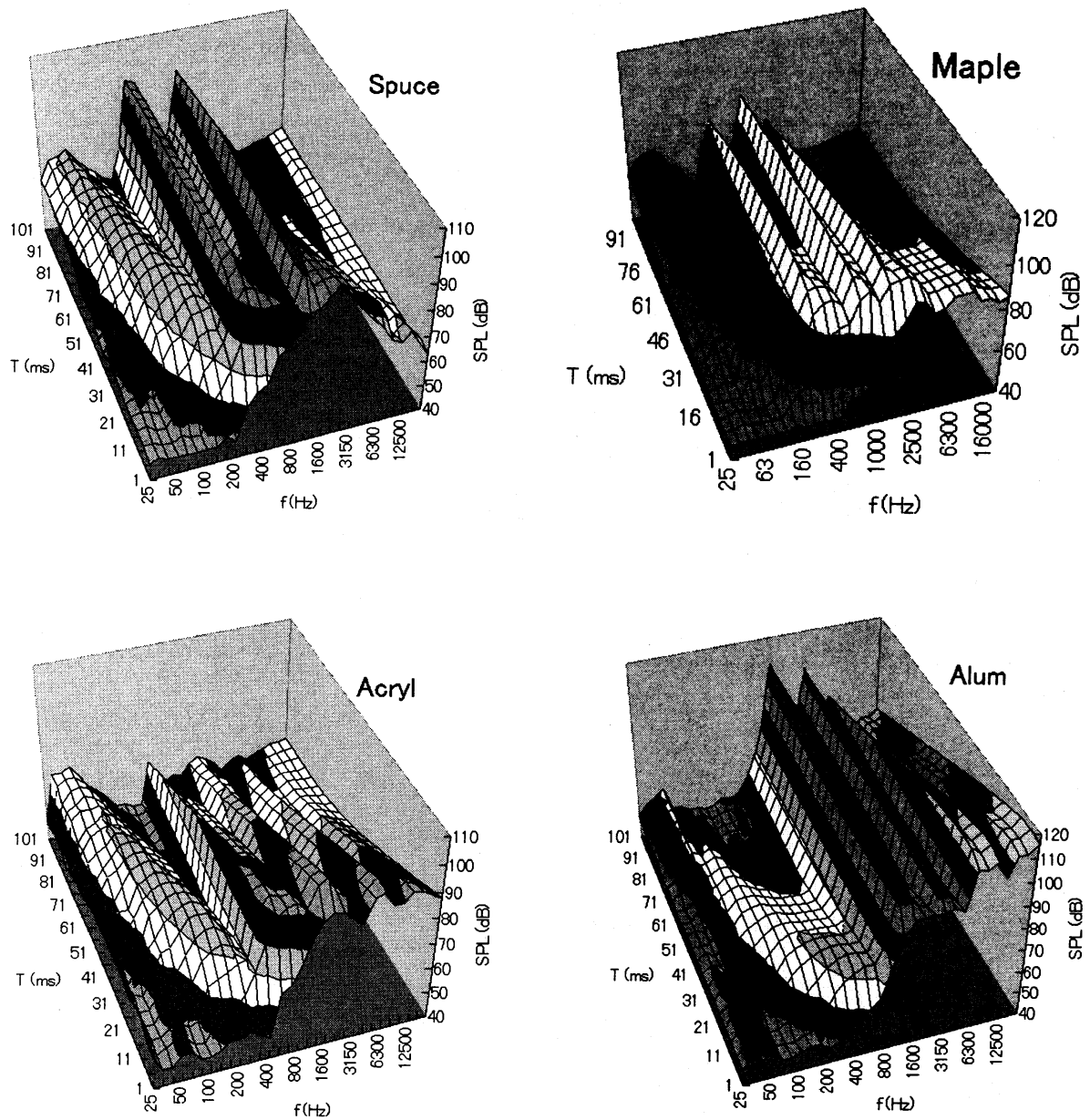


図 1. タッピング音の 1/3 オクターブバンドパワースペクトルの時間変化

図から、各材料には次の特徴が認められる：

- (1) Sp は周波数が高くなるとレベルが大きく落ちる.
- (2) Map は余り落ちない.
- (3) Acr の山はどれもブロードである.
- (4) Al は低域成分がなく、高域の山は高く鋭く減衰が極めて小さい.

4. 音圧レベルの立ち上がり曲線

このデータから音圧レベル(SPL)の立ち上りを調べた。シトカスプルス、カエデ、アクリル、アルミニウムの周波数別立ち上がり曲線をそれぞれ図 2-5 に示す。周波数は適当に 0.5, 1, 2, 3.15, 5kHz の 5 バンドを選んだ。 P_o は SPL のオーバーオール値であり、各線はその周波数成分内訳になるが、それらは立体図の縦断面に対応する。図は 1ms 間隔でプロットした。

各材料には立ち上がり曲線において、次に示す特徴と原因が明らかに認められる：

- (1) 立ち上がりにおいて、Sp は主成分が 1kHz で意外と遅く、カエデは 2kHz で早く、Acr は 5kHz でほぼ瞬間、Al は 5kHz で遅い。
- (2) Sp や Acr の P_o 値は直線的に減衰する。これは周波数成分がほぼ一様に減衰するためである。
- (3) Map や Al の P_o 値は直線的に減衰せず、初め減衰が大きく、その後小さくなる。これは主成分が減衰の強い高域成分から次第に減衰の緩やかな低域成分へ移行するためである。

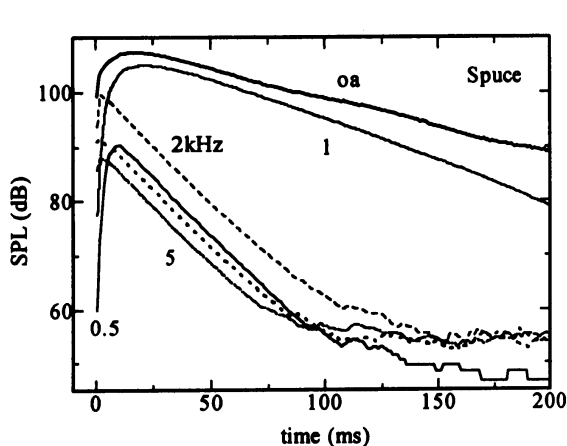


図 2. スプルースの立ち上がり曲線

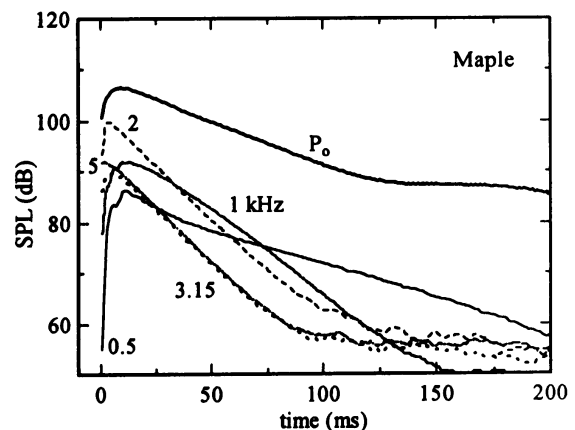


図 3. カエデの立ち上がり曲線

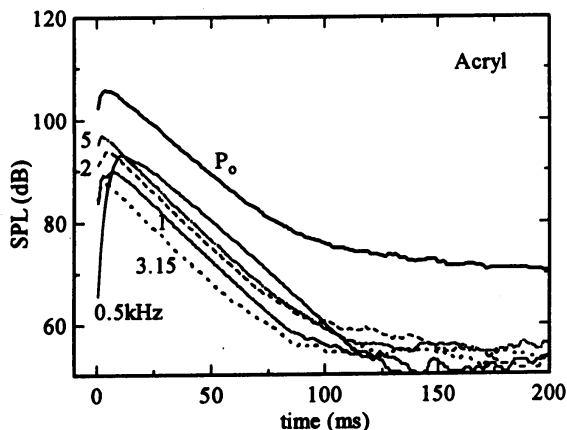


図 4. アクリルの立ち上がり曲線

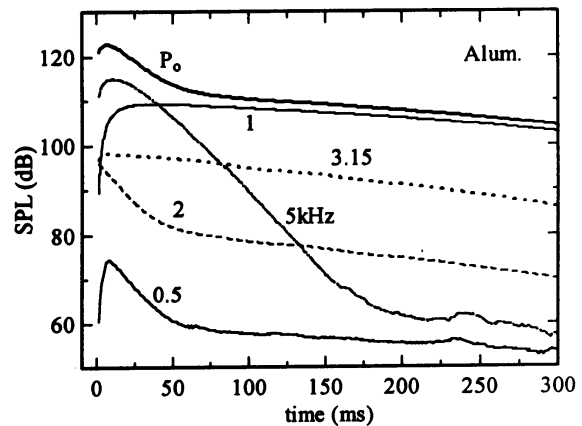


図 5. アルミニウムの立ち上がり曲線

これは、Sp は高域成分はすぐ立ち上がるが遅れて立上る f_{IL} が主成分となりこれが高いレベルで残響し、一方、Map は高域成分ですぐ立上るがすぐ減衰して残響しないことを意味する。この Sp の特徴は表板に必要な定常周波数特性を有するためには避けられないことであり、これが楽器にとって不都合になる場合には演奏技巧や楽器機構（ピアノの消音ペダルなど）によってその対策が施されていると理解できる。

5. 立ち上がり時間と減衰速度の周波数変化

上の立ち上がり曲線からすべてのバンドについて立ち上がり時間 T_r と減衰速度 δ (dB/s) を調べて、それらの周波数変化を表した。スプルースとカエデ、アクリル樹脂とアルミニウムの T_r と δ の周波数変化をそれぞれ図 6, 7 に示す。 T_r は周波数 f が高くなるにつれて急激に減少した。対数目盛で T_r , δ の周波数特性を示す。図から立ち上がりが遅いところでは、 δ が小さくなっている。上図に初期値に合わせた $T(s) = k/f$ の直線を示したが、 T_r は共振点 f_{IL} までは各材料いずれも直線的に減少し材料による差は殆どない。しかし、それ以上の周波数では T_r 変化は材料により大きく異なっている。すなわち、Sp, Acr, Map, Al の順に T_r が大きくなっている。ここで、時定数 τ は内部摩擦 Q^{-1} (対数減衰率 δ) ・角周波数 ω と次の関係がある：

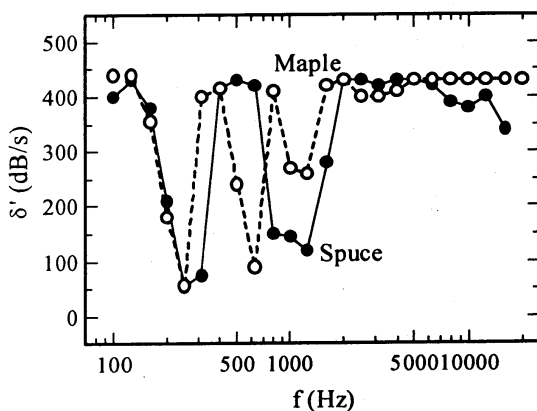
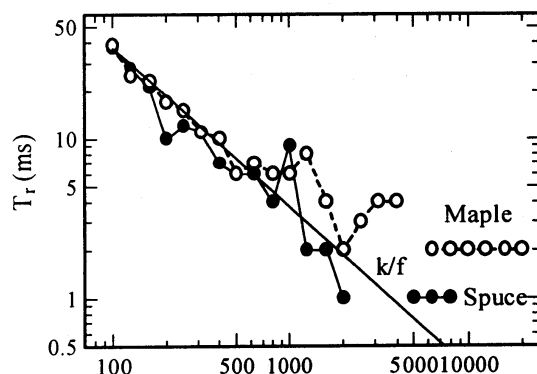


図 6. スプルースとカエデの立ち上がり時間と減衰速度の周波数変化

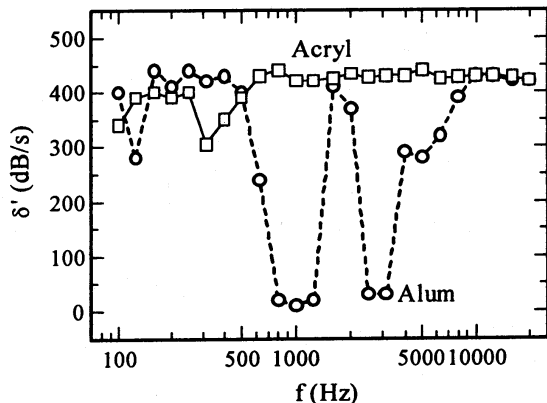
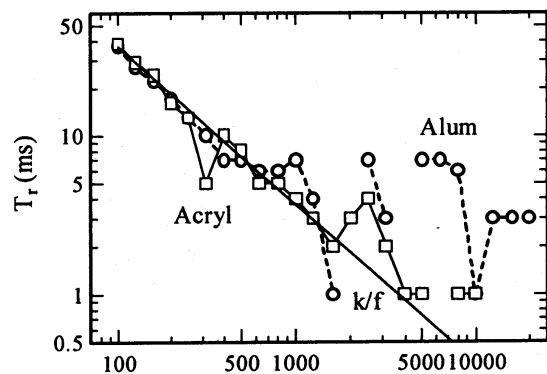


図 7. アクリルとアルミニウムの立ち上がり時間と減衰速度の周波数変化

$$\tau = \frac{2}{\omega Q^{-1}} = \frac{2\pi}{\omega \delta} \quad (4)$$

上式は立ち上がりの速さが周波数だけでなく内部摩擦にも依存することを示す。これから、 Q^{-1} (または δ) が小さくなる、あるいは周波数が低くなると立ち上がりは遅くなることが分かる。したがって、 f_{IL} で Tr が大きいのはそこでは共振が強く減衰率が小さいので時定数が大きいためであり、 f_{IR} での共振は f_{IL} での共振ほど強くないので、 f_{IR} での Tr が小さく、目立たないのである。故に、最低共振周波数以下の領域では Tr は f (または周期) だけで決まり、それ以上ではその違いの原因は Q^{-1} 値であると思われる。

そこで各材料の L 方向基本モードの内部摩擦 Q_{LI}^{-1} 値を測定した。その結果、Sp は 0.007, Acr は 0.06, Map は 0.01, Al は 0.001 程度であった。しかし、Acr は Q^{-1} 値が最も大きいのに Tr が最小でなく、Sp は Q^{-1} 値が小さいにも拘わらず Tr が最小になっており、上の解釈と矛盾する。これはこの Q^{-1} 値が高域の値でないからと思われる。

6. 高域 Tr 挙動の原因

減衰速度の周波数変化を見ると、Acr は全域で減衰速度が大きく、Sp と Map は高域で大きくなるが Map の方に弱い共振が認められ、Al は高次モード共振が強い。しかし、材料による高域の減衰の違いは δ 図からでは分かり難い。そこで、バンド毎の立ち上がり曲線のピーク値 P_m から、 P_m で見た周波数応答特性を調べた。これは Q^{-1} は振幅と連動するので音圧レベルの周波数特性から高域の Q^{-1} 挙動が推測できると考えたからである。それを図8に示す。その結果、次のことが認められる：

- (1) Sp は f の増加に伴いレベルが大きく減少している。これは高域で Q^{-1} は大きく増加することを示唆している。
- (2) Map は f の増加に伴うレベルの減少は小さい。これは高域での Q^{-1} 増加は小さいことを示唆している。
- (3) Acr は高域で殆ど減少しない。これは高域での Q^{-1} の増加は僅かであることを示唆している。
- (4) Al は高次モード共振が強く、高域レベルが極めて高い。これは高域でも Q^{-1} は殆ど変わらないことを示唆している。

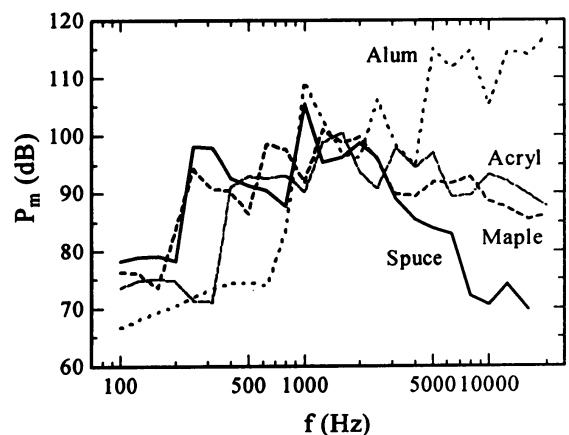


図8. 立ち上がり曲線の P_m レベルの周波数変化

また、H.Meinel は、数樹種の木材の対数減衰率の周波数依存性を調べ、周波数に伴う Q^{-1} の増加が Sp が Map よりも大きいこ

とを示しており、上の推測と一致する⁵⁾。したがって、高域では Q^{-1} が増加し、とりわけ Sp のそれが大きいと考えることは妥当である。

高域特性を決める高次モードの撓み振動は、断面の剪断変形の影響を受けるので、モード次数は増加しても固有振動数は余り伸びず、高域では結果的にレベルは低下する。そして一般に剪断内部摩擦は曲げ内部摩擦より大きいので、これが高域で Q^{-1} が増加する原因と考えられる。この影響を考慮した板の撓み振動方程式は、(1)式から予想されるように大変難解になる。しかし、棒にその影響を考慮したものがあり、以下にそれを用いて考察する。

矩形棒の回転慣性及び剪断力による撓みを考慮した振動方程式は S.Timoshenko によって次式が導かれている⁶⁾：

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho EI}{k'G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (5)$$

第3項が回転慣性項、第4,5項が剪断項である。剪断項の k は断面上の剪断応力分布が一様でないため導入される定数で、矩形断面では 0.83 である。(1)'式に辺長を掛ければ通常の棒の撓み振動方程式である前の二項と一致することが分かる。前の二項を両端自由で解いたときの角振動数は、

$$\omega = \frac{m^2 h}{2\sqrt{3}l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6)$$

上式から得られるヤング率を見掛けのヤング率 E_A とするとき、Goens は回転慣性及び剪断力の影響を E_A の補正係数 T として解いた⁷⁾：

$$E = E_A \cdot T \quad (7)$$

$$T = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2 m F(m) (m F(m) + 6) + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2 m F(m) (m F(m) - 2) \frac{E}{k'G} - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \frac{\frac{1}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2 m^4 \frac{E}{k'G}}{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2 m^2 \left(1 + \frac{E}{k'G} \right)} \quad (8)$$

ここで、 m は境界条件と振動モードによって決まる定数、 $F(m) = \tanh(m/2)$ (奇数次モード)； $F(m) = \coth(m/2)$ (偶数次モード) であり、 T の第2項が回転慣性、第3,4項が剪断力の補正項である。

この式からこの影響は同じ寸法なら弾性率比 E/G 値が大きいものほど補正が大きい、すなわち、高域のレベル減少が大きいことが分かり、 E/G 値がその指標となる。 L 方向振動の場合、この値は E_L/G_{LT} に対応し、 Sp はこの値が大きく、 Map は

この値が小さい。したがって、 S_p は剪断力の影響が大きく、高域では曲げ内部摩擦より大きい剪断内部摩擦が大きく加わる。 S_p が高域で他材料より Q^{-1} が大きく増加するのはこのためである。筆者が数樹種の剪断内部摩擦と曲げ内部摩擦を測定した結果は、捩じり内部摩擦の方が3倍程度大であることを示した⁸⁾。

しかし、 S_p の Q^{-1} が高域で増加しても、最も大きい Acr の値を超えることは考え難い。等方性板では正方形のとき直交方向の両共振に縮退が生じる。 Q^{-1} 値はその影響を受け、これがその一因になっていることが推測される。等方性の場合、(1)

式は $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ の関係を用いて、次式の様に若干簡潔になる⁹⁾：

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

ただし、 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ である。 $E' = \frac{E}{1-\mu^2}$ と置き、(9)式を変形すると、

$$E' \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10')$$

単純支持縁のとき、角振動数は次式で表される：

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{\alpha^2}{l_L^2} + \frac{\beta^2}{l_R^2} \right)} = \frac{\alpha^2}{l_L^2} \sqrt{\frac{E' I_{RT}}{A_{RT} \rho}} + \frac{\beta^2}{l_R^2} \sqrt{\frac{E' I_{LT}}{A_{LT} \rho}} \quad (11)$$

ここで、 A は断面積； I は断面二次モーメント； $\alpha = (n_1 - 1)\pi$ 、 $\beta = (n_2 - 1)\pi$ ($n_1, n_2 = 2, 3, 4, \dots$) である。

さらに、自由縁の正方形板では、

$$\omega = \frac{\alpha^2}{l^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{\alpha^2}{l^2} \sqrt{\frac{E' I}{A \rho}} \quad (12)$$

このように縮退が示されるが、このときの Q^{-1} 挙動を実験的に確かめた。Table 1 に両端自由撓み振動法による矩形棒と正方形板における共振周波数と内部摩擦の測定結果を示す。表から縮退のため、板はいずれも共振周波数は見掛け上増加するが、軽い板ほどその割合が大きくなること、内部摩擦は見掛け上軽い板ほど大きく減少、重い板ほど大きく増加する事が分かった。それ故、軽い Acr は縮退により Q^{-1} が大幅に減少して S_p より立ち上がりが遅くなったのである。したがって、 f_{1L} 以上では、共振の強度が T_r を決めると結論できる。

表 1. 等方性材料における矩形棒の共振周波数 f_{1b} , 内部摩擦 Q_b^{-1} と正方形板の
それら f_{1p} , Q_p^{-1} の比較

Material	ρ g/cm ³	f_{1b} Hz	f_{1p} Hz	Δf_1 Hz	Δf_1 %	Q_b^{-1} $\times 10^3$	Q_p^{-1} $\times 10^3$	ΔQ^{-1} $\times 10^3$	ΔQ^{-1} %
Acrylic resin	1.18	378.5	458	79.5	21	58.1	51.3	-6.8	-11.7
Soda glass	2.49	885.8	968.7	82.9	9.35	1.98	1.96	-0.016	-0.8
Aluminum	2.69	936.1	1087.7	151.6	16.2	1.02	1.43	0.41	40.2
Alumina Cer.	3.91	1950.4	2197	246.6	12.6	0.152	1.64	1.49	979

* $\Delta f_1 = f_{1p} - f_{1b}$, $\Delta Q^{-1} = Q_p^{-1} - Q_b^{-1}$, 矩形棒サイズ: 105(l)x16(w)x2(t) mm, 正方形板サイズ: 105x105x2(t) mm.

7. 響板用木材の周波数特性のメカニズム

一般に、響板用材には E_L/ρ 値が大きく Q_L^{-1} 値が小さいこと、あるいは、音響変換効率を表す $(E_L/\rho)/Q_L^{-1}$ 値が大きいことが求められる。 E_L/ρ は Q_L^{-1} と強い負の相関が認められているので、これらの条件は時定数を大きくするため、立ち上がりを遅くする。しかし、Sp は大きい E_L/ρ 値と小さい Q_L^{-1} 値を持つ上に E_L/G_{LT} の大きい値を持つので、中域までのレベルは高いが、高域において大きくレベル低下する特性と立ち上がりの早い特性を実現することができ、正に絶妙な特性を示すのである。木材はもともと生命体維持の結果生まれた構造であるが、それが生み出す特性がたまたま楽器に適していた。そして、人類がそれを見出し、巧みに利用しているのである。

8. 結論

立ち上がり時間 T_r は材料に拘わらず基本モード共振までの周波数の増加に伴い急激に減少し、その後、材料により異なった。前者が周波数のみに、後者が撓み共振の強度に依存した。響板に用いられるスプルースは、中域まで高いレベルを示し、その後、内部摩擦を大きく増加することによって大きくレベル低下し、高域で最も早い立ち上がり特性を示した。この高域特性は、スプルースが最も大きい剪断の影響のせいであった。

参考文献

- 1) T. Ono, "Frequency responses of wood for musical instruments in relation to the vibrational properties," J. Acoust. Soc. Jpn. (E) 17, 183-193 (1996).
- 2) T. Ono, "Transient response of wood for musical instruments and its mechanism in vibrational property," J. Acoust. Soc. Jpn. (E) 20, 117-124

- (1999).
- 3) R. F. S. Hearmon, "The elasticity of wood and plywood," in Forest Products Research Special Report, No.7 (His Majesty's Stationary Office, London, 1948), Part I .
 - 4) T. Ono, "Effects of varnishing on acoustical characteristics of wood used for musical instrument soundboards," J. Acoust. Soc. Jpn. (E) 14, 397-407 (1993).
 - 5) H. Meinel, "Regarding the sound quality of violins and a scientific basis for violin construction," J. Acoust. Soc. Am. 29, 817-822 (1957).
 - 6) S. Timoshenko, "工業振動学", 東京図書, p.302 (1972).
 - 7) E. Goens, "Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen," Ann. Phys., 11, 649-678 (1931).
 - 8) T. Ono, "The dynamic rigidity modulus and internal friction of several woods in torsional vibration," Mokuzai Gakkaishi, 26, 139-145 (1980).
 - 9) 妹沢克惟, "振動学", 現代工学社, P.126(1971).